ΛΥΣΕΙΣ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2002

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 229

Β. 1.Σ, 2.Λ, 3.Λ, 4Σ, 5Σ, 6Λ, 7Λ, 8Σ

Το 5 θέλει διευκρίνιση αν τα όρια είναι πραγματικοί αριθμοί η όχι

ΘΕΜΑ 2ο

α.

$z_1 + 5z_2 = -1 + i + 5(3-4i) = -1 + i + 15 - 20i = 14 - 19i$

β.

$$\frac{z_2}{\overline{z_1}} = \frac{3-4i}{-1-i} = \frac{(3-4i)(-1+i)}{(-1+i)(-1+i)} = \frac{-3+3i+4i+4}{1+1} = \frac{1}{2}+\frac{7}{2}i$$

γ.

$$\rho = |z_1| = \sqrt{2}\ , \quad \text{συν}\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ , \quad \text{ημ}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα $\theta = \frac{3\pi}{4}$, οπότε $\text{Arg}(z_1) = \frac{3\pi}{4}$

δ.

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{3\pi}{4} + i\,\text{ημ}\frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow z_1^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8\left(\text{συν}\frac{24\pi}{4} + i\,\text{ημ}\frac{24\pi}{4}\right) =$$

$$= 16(\text{συν}6\pi + i\,\text{ημ}6\pi) =$$

$$= 16(1 + 0i) = 16$$

ΘΕΜΑ 3ο

α.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$

Πρόσημο της f ΄ και μονοτονία της f

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f ΄		+	0	–	0	+	
f		↗	|	↘	|	↗	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty\ ,\ 1]$, $[3,\ +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,\ 3]$

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 1$, το $f(1) = 2$

και τοπικό ελάχιστο για $x = 3$, το $f(3) = -2$

β.

Είναι $f(-1) = -18$ και $f'(-1) = 24$, οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι

$y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y + 18 = 24(x+1) \Leftrightarrow y = 24x + 6$

γ.

Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ με $f(0) = -2$ και $f(1) = 2$, άρα $f(0)f(1) < 0$
Επομένως, από το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0$ θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό, η ρίζα θα είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ 4ο

α.

Θα πρέπει να ισχύει $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

Όμως $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^3-4x}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x(x^2-4)}{x-2} =$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{x(x-2)(x+2)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2^-} x(x+2) = 8$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (-x^2 + k) = -4 + k$$

$$f(2) = -4 + k$$

Οπότε πρέπει $8 = -4 + k \Leftrightarrow k = 12$

β.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-4x}{x-2} = \frac{1-4}{1-2} = 3$$

γ.

Για $k = 12$ και $x \geq 2$ είναι $f(x) = -x^2 + 12$ με $f'(x) = -2x$
Οπότε ο ρυθμός μεταβολής στο $x = 4$ είναι $f'(4) = -8$

δ.

Για κάθε $x < 2$ είναι $g(x) = \frac{f(x)}{x+3} = \frac{\frac{x^3-4x}{x-2}}{x+3} = \frac{x^3-4x}{x^2+x-6}$

$\lim_{x\to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-4x}{x^3+x^2-6x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1.$ Άρα $\lambda = 1$

$$\lim_{x\to -\infty} \left(g(x) - \lambda x\right) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^3-4x}{x^2+x-6} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-4x-x^3-x^2+6x}{x^2+x-6} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-x^2+2x}{x^2+x-6} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1. \quad \text{Άρα } \beta = -1$$

Επομένως πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ είναι η ευθεία $y = x - 1$